

# ELS ELEMENTS D'EUCLIDES. IDEES TRIGONOMÈTRIQUES A L'AULA

**M. Fàtima Romero Vallhonestà (1), Iolanda Guevara Casanova (2)  
i M. Rosa Massa Esteve (3)**

- 1) Membre del Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques. Inspecció d'Educació. Barcelona-Comarques
- 2) Membre del Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques. IES Badalona VII
- 3) Coordinadora del Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques. Centre per a la Recerca d'Història de la Tècnica. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *trigonometria, geometria plana, Euclides, teorema de Pitàgores, teorema del cosinus, ensenyament.*

Euclides' *Elements*. Trigonometrically ideas in the classroom

Summary: *History can be useful for science teaching. In this paper we present two propositions from Euclid's Elements related to trigonometry which are taught in high school. The first one is proposition 47 of Book I, best known as Pythagoras theorem and the second one is proposition 12 of Book II, best known as cosines theorem.*

*From Elements text we have created a new teaching material which contains explanations using a constructive learning method. It has been satisfactorily experimented with students who build their own reasoning like the old Greek did.*

Key words: *trigonometry, planar geometry, Euclid, Pythagoras theorem, cosines theorem, teaching.*

## Introducció

Les aportacions implícites i explícites de la història de la matemàtica poden proporcionar als professors un enriquiment per a la seva tasca docent. El coneixement de la gènesi i l'evolució de les idees i conceptes matemàtics és útil per a millorar l'aprenentatge de l'alumnat i aporta recursos valuosos per a l'educació científica.<sup>1</sup>

1. Vegeu més informació sobre aquestes idees a Massa (2003, p. 4-9).

En aquest context el Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) està treballant en el projecte «El naixement i desenvolupament de la trigonometria en les diferents civilitzacions» que investiga els orígens de la trigonometria. Un dels objectius del projecte és seleccionar textos històrics susceptibles de ser utilitzats a l'aula per a millorar l'aprenentatge de la trigonometria.<sup>2</sup> Altres textos ja analitzats en aquest projecte han estat: *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* d'Aristarc de Samos (310 aC-230 aC) (Massa, 2005), l'*Almagest* de Ptolemeu (c. 95- c. 165) (Massa, Romero, 2003), *Traité du quadrilatère* de Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) (Massa, Romero, Casals, 2006) i *De triangulis omnimodis* de Regiomontanus (1436-1476) (Guevara, Casals, 2003).

En aquest article es presenta l'anàlisi de dues proposicions dels *Elements* d'Euclides (300 aC) que estan relacionades amb la trigonometria que s'imparteix a l'ESO i al batxillerat. La primera és la proposició 47 del llibre I dels *Elements* que coneixem actualment com el *teorema de Pitàgores* de la qual s'ha fet una petita guia didàctica que ja ha estat experimentada amb alumnes de quart de l'ESO. La segona és el que avui anomenem *teorema o fórmula del cosinus*, de la qual s'està elaborant una guia didàctica per a primer de batxillerat. Com mostrarem més avall, el raonament geomètric que entren els alumnes en aquestes activitats constitueix una valuosa eina per a la seva formació científica.

### Idees trigonomètriques en els *Elements*

L'episodi històric que presentem se situa en el marc de la ciència grega. Si bé Hiparc de Nicea (c. 190 aC-c.120 aC) és considerat el pare de la trigonometria i Ptolemeu, amb la seva obra *Almagest*, va contribuir de manera important al seu desenvolupament, sense els *Elements* d'Euclides aquests avenços segurament haurien hagut d'esperar molt de temps. Cal remarcar que el mètode que Ptolemeu emprà per a construir les taules de cordes es basa en diferents proposicions dels *Elements* d'Euclides.

En els *Elements* d'Euclides es recullen els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i es demostren algunes proposicions geomètriques que es poden interpretar en termes trigonomètrics. Aquesta obra, que es creu que podria ser col·lectiva, és una de les més editades, després de la Bíblia, i és una de les que més influència cultural ha exercit al llarg de la història de la ciència. Durant molts segles, va ser emprada com a llibre de text a les universitats i va influir extraordinàriament en els grans autors de les revolucions científiques com ara Galileu Galilei, Isaac Newton i d'altres.

Els *Elements* consten de tretze llibres: els sis primers estan dedicats a la geometria plana; els tres següents, a l'aritmètica (o teoria de nombres); el desè tracta dels incommensurables, i els tres últims tracten de la geometria de sòlids.<sup>3</sup> Pel que fa a l'estil de l'obra, po-

2. El Grup de Treball d'Història de les Matemàtiques es va formar el curs 1999-2000 i pertany a l'Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat de Barcelona. Els altres membres del grup són M. Àngels Casals Puit (IES Joan Corominas) i Paco Moreno Rigall (IES XXV Olimpíada). Sobre el desenvolupament de la trigonometria podeu consultar Zeller (1944) i Maor (1998).

3. Els quatre primers (I-IV) s'atribueixen als pitagòrics, el cinquè i el sisè són deguts a Èudox. Els VIII i IX són també dels pitagòrics. El X és degut a Teeteto. El llibre XI procedeix de l'escola jònica. El XII té diversos precursors però el mètode d'exhaustió que s'hi inclou i que és el que permet demostracions rigoroses és d'Èudox. Finalment, el llibre XIII és obra de Teeteto. Per a més informació, vegeu Dou (1986, p. 68).

dem qualificar-lo d'axiomàtic i rigorós. Cada llibre té la mateixa estructura, primer els axiomes i/o postulats, seguidament les definicions i després les proposicions, cadascuna amb la seva demostració. Es demostren tots els resultats a partir d'hipòtesis clares i de propietats explícitament establertes tot anotant en el marge les proposicions i definicions que s'empren.

A l'obra d'Euclides es troben algunes proposicions, com ara la que correspon al que actualment coneixem com a teorema de Pitàgores (*Elements*, 47, I), fonamental per a la construcció de les taules de cordes que van marcar els inicis de la trigonometria sistemàtica. També conté el que avui anomenem *teorema del cosinus* i que s'utilitza en el primer curs de batxillerat per a la resolució de triangles qualssevol, tot i que en els *Elements* està formulat amb llenguatge geomètric i es distingeix entre triangles obtusangles (*Elements*, 12, II) i acutangles (*Elements*, 13, II).

Activitat de classe: teorema de Pitàgores

L'enunciat de la proposició (prop. 47, I) és el següent:

En els triangles rectangles, el quadrat sobre el costat que correspon a l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.<sup>4</sup>

La demostració d'Euclides es basa a comprovar que el quadrat BDEC construït sobre la hipotenusa BC és la suma dels quadrats GB i HC construïts sobre els catets BA i AC, respectivament (vegeu la figura 1).<sup>5</sup>

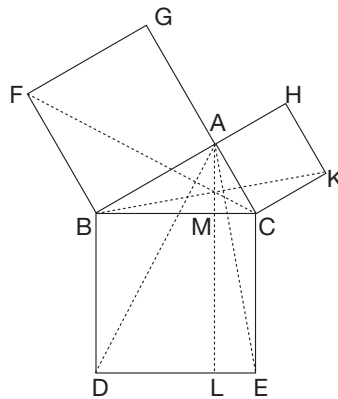


FIGURA 1. Dibuix original que il·lustra la proposició 47, I.

4. «In right-angle triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle» (Euclides, 1956, p. 349).

5. La nomenclatura utilitzada per a designar els paral·lelograms respecta la dels *Elements*. Alguna vegada per a referir-se a un quadrat, Euclides fa servir els quatre vèrtexs, encara que en la majoria dels casos només n'utilitza dos d'oposats.

En el text per als alumnes, es parteix del dibuix original d'Euclides i se segueix el seu raonament amb l'ajuda de nous dibuixos que s'han construït a partir de l'inicial. Es tractarà de veure que els dos paral·lelograms BL i CL, que formen el quadrat BDEC, són iguals als quadrats respectius GB i HC.

El raonament per a demostrar que el paral·lelogram BL és igual al quadrat corresponent GB es desenvolupa en quatre etapes:

- a) Els triangles ABD i FBC són iguals, ja que tenen iguals dos costats i l'angle comprès entre ells
- b) El paral·lelogram BL és el doble que el triangle ABD, ja que tenen la base i l'altura iguals
- c) El quadrat GB és el doble que el triangle FBC, perquè tots dos tenen, com en el cas anterior, la mateixa base i la mateixa altura
- d) El paral·lelogram BL i el quadrat GB són iguals, ja que ho són els dos triangles amb els quals s'han comparat.

Anàlogament es demostra que el paral·lelogram CL és igual al quadrat HC considerant els triangles AEC i BCK.

Per tant, el quadrat BDEC, que és la suma dels paral·lelograms BL i CL, és igual a la suma dels quadrats GB, HC, fet que demostra el teorema de Pitàgores.

El material del qual disposen els alumnes consisteix en deu fulls amb dibuixos que ajuden a entendre el raonament propi dels *Elements* (vegeu l'annex). Es parteix del dibuix original de l'obra i s'il·lustren els quatre passos del fil conductor amb noves figures, mitjançant les quals es guia els alumnes a través del raonament geomètric, al qual no estan habituats. De fet, en el currículum de tercer i quart de l'ESO es dóna molta importància a les relacions numèriques, algebraïques i funcionals oblidant, massa sovint, el raonament geomètric que queda relegat a cursos més elementals.

Al llarg de la primera classe s'explica el raonament geomètric de la demostració d'Euclides i els alumnes a poc a poc refan dibuixos, completen frases i, finalment, escriuen i dibuixen de nou els passos de la demostració. És la *seva* demostració perquè l'han construïda ells mateixos, seguint les pautes del dossier. Per a reconstruir tota la demostració del teorema han fet falta dues sessions, una per als raonaments i una altra per a completar la demostració. Els alumnes treballen per parelles i comenten entre ells els passos del raonament. El professor propicia que tothom treballi i procura que els alumnes avancin de forma autònoma. Al final, es recull en un petit treball tota la demostració del teorema: els passos seguits, les frases utilitzades, les fórmules i els dibuixos que sostenen el raonament a partir dels suggeriments i les pautes del dossier de treball. Es completa l'estudi presentant el personatge emmarcant-lo en el seu temps i analitzant les idees científiques de l'època grega.

Al principi de l'experiència, alguns alumnes es mostren una mica desconcertats pel fet de poder demostrar una fórmula sense haver d'efectuar operacions algebraïques complicades, però, a mesura que van avançant en la demostració, el mètode els sorprèn i, fins i tot, uns quants descobreixen la potència d'aquest raonament i s'entusiasmen. En general, els alumnes valoren positivament l'experiència i es mostren predisposats a fer més treballs en aquesta línia. Des del punt de vista del professorat, ens complau la bona acollida que ha tingut aquesta activitat i ens duu a pensar que hem aconseguit un doble repte: dissenyar i aplicar

una activitat d'aprenentatge original, diferent de les que habitualment es fan amb els alumnes, i aconseguir que sigui el mateix alumne qui construeixi el seu raonament.

Activitat en preparació: teorema del cosinus

L'enunciat de la proposició (prop. 12, II) és el següent

En els triangles obtusangles, el quadrat sobre el costat oposat a l'angle obtús (CB) és més gran que els quadrats sobre els costats que formen l'angle obtús (AB i AC) en dues vegades el rectangle determinat per un dels costats de l'angle obtús (AC) sobre el que cau la perpendicular i la recta exterior tallada per la perpendicular, fins a l'angle obtús (DA).<sup>6</sup>

Euclides, en aquesta proposició (vegeu la figura 2), vol demostrar el que, en notació actual, escriuríem com:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot DA \cdot AC .$$

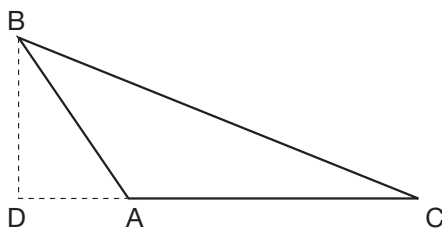


FIGURA 2. Dibuix original que il·lustra la proposició 12, II.

Per a fer la demostració, es basa en dues proposicions anteriors: el teorema de Pitàgores i la proposició 4 d'aquest mateix llibre que s'enuncia així:

Si es talla a l'atzar una línia recta (AB), el quadrat sobre la recta sencera és igual als quadrats sobre els segments i dues vegades el rectangle determinat per (aquests) segments.<sup>7</sup>

Aquesta proposició és coneguda pels alumnes de l'ESO però en la seva versió algebraica, com el quadrat d'un binomi,

$$(AC + CB)^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB .$$

6. «In obtuse-angled triangles the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the obtuse angle namely that on which the perpendicular falls, and the straight line cut off outside by the perpendicular towards the obtuse angle» (Euclides, 1956, p. 403).

7. «If a straight line be cut ad random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments» (Euclides, 1956, p. 379).

Euclides parteix del triangle BAC obtusangle en A i construeix, a partir del punt B, la perpendicular BD sobre el costat CA prolongat. La base del triangle resultant BDC es pot considerar tallada a l'atzar pel punt A. Llavors, per la proposició 4, II:

$$DC^2 = DA^2 + AC^2 + 2 \cdot DA \cdot AC .$$

Si afegim als dos costats de la igualtat el quadrat de DB, obtindrem:

$$DC^2 + DB^2 = DA^2 + AC^2 + 2 \cdot DA \cdot AC + DB^2 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles BDA i BDC, el primer membre de la igualtat anterior es converteix en  $CB^2$  i en el segon membre es poden substituir  $DA^2 + DB^2$  per  $AB^2$ , amb la qual cosa s'obté el teorema:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot DA \cdot AC .$$

El material per a l'aula s'elabora seguint les mateixes pautes que en el dossier anterior. Es parteix dels dibuixos originals, s'intercalen nous dibuixos, raonaments i expressions que l'alumnat ha de completar, seguint d'aquesta manera el raonament geomètric d'Euclides.

## Conclusió

L'ús de textos històrics, com ara els *Elements* d'Euclides, és un dels recursos que es poden utilitzar per a millorar la transmissió i adquisició dels continguts matemàtics i també per a actuar de revulsiu en aquells casos en els quals manca motivació als alumnes. De fet, la utilització a l'aula de textos històrics aporta a l'alumnat una nova visió de les idees matemàtiques i l'ajuda a assolir una formació més integral.

Les activitats presentades es poden programar com a complement en la classe de trigonometria. Tanmateix, el treball amb els *Elements* d'Euclides, obra fonamental dins l'evolució de les matemàtiques, permet que els alumnes s'apropin a una manera de treballar i a un model de raonament que ha tingut un paper clau en la història de les matemàtiques. Durant molts segles, aquesta obra va ser el paradigma de text científic que calia seguir, tant pel que fa a l'estructura amb què estava escrit (axiomes i/o postulats, definicions i proposicions amb la seva demostració) com per la utilització dels resultats que contenia (proposicions). Cal recordar als alumnes alguns dels científics posteriors que citen els *Elements*, com ara Galileu Galilei o Isaac Newton, els quals segurament coneixen des d'àmbits no matemàtics; això els ajudarà a copsar la rellevància d'aquesta obra en la història de la ciència.

La presentació dels *Elements* també possibilita que ens aproximem a la cultura grega des de la classe de matemàtiques, que els alumnes s'adonin que les matemàtiques i la seva història formen part del bagatge cultural d'un poble i d'una manera de pensar i raonar.

Finalment, remarquem que els exemples presentats són especialment gratificants tant pel seu contingut com per la manera com es demostren ambdós resultats, ja que és el mateix alumne qui aprèn utilitzant el seu raonament a imitació dels antics savis grecs.

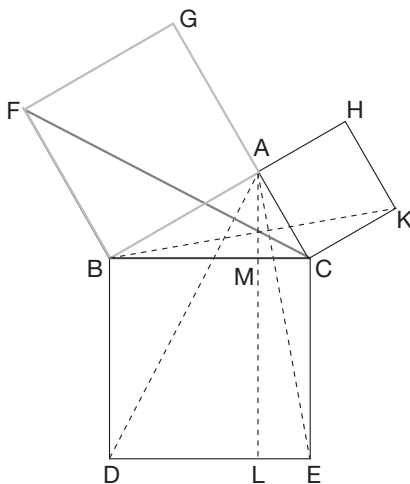
## Bibliografia

- EUCLIDES, (1956). *The elements*. Vol. 2. Nova York: Dover. [Edició anglesa de T. L. Heath]
- DOU, A. (1986). «Euclides». A: *Historia de la matemàtica hasta el siglo XVII: Curso de conferencias desarrollado durante los meses de febrero y marzo de 1986*. Madrid: Publicaciones de la Real Academia de Ciencias.
- GUEVARA, I; CASALS, M. A. (2003). «Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476)». A: BATLLÓ, J. [et al.] [ed]. *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, p. 191-199.
- MAOR, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton: Princeton University Press.
- MASSA, M. R. (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica». *Biaix*, núm. 21, p. 4-9.
- (2005). «L'ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC.)». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. [ed.]. *Actes de la I Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: SCHCT, p. 95-101.
- MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2003). «De la geometria a la trigonometria: el teorema de Ptolemeu». A: BATLLÓ, J. [et al.] [ed]. *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: SCHCT, p. 153-159.
- MASSA, M. R.; ROMERO, F.; CASALS, M. A. (2006). «La trigonometria en el món àrab. *Tractat sobre el quadrilàter complet* de Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274)». A: BATLLÓ, J. [et al.] [ed]. *Actes de la VIII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona, SCHCT. [En premsa]
- ZELLER, S. M. C. (1944). *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Michigan: Ann Astor: University of Michigan.

## ANNEX

### FULL DEL DOSSIER DELS ALUMNES

**El quadrat GB és el doble del triangle FBC:**



El raonament és igual al que heu fet amb el rectangle i el triangle de la pàgina anterior.

**El quadrat i el triangle tenen la mateixa base:**

- Encareu-vos el dibuix de manera que la base sigui la mateixa per a les dues figures.
- Escriviu la paraula *base* en el costat que correspongui.

**El quadrat i el triangle tenen la mateixa altura:**

- Localitzeu-la i escriviu la paraula *altura* al costat.

**Conclusió:**

En aquestes condicions, bases iguals i altures iguals,

L'àrea del quadrat és ..... de l'àrea del triangle